核反应堆物理

第3章

中 子 扩 散 理 论

主讲人：张 彪

2019年9月3日

第3章 中子扩散理论

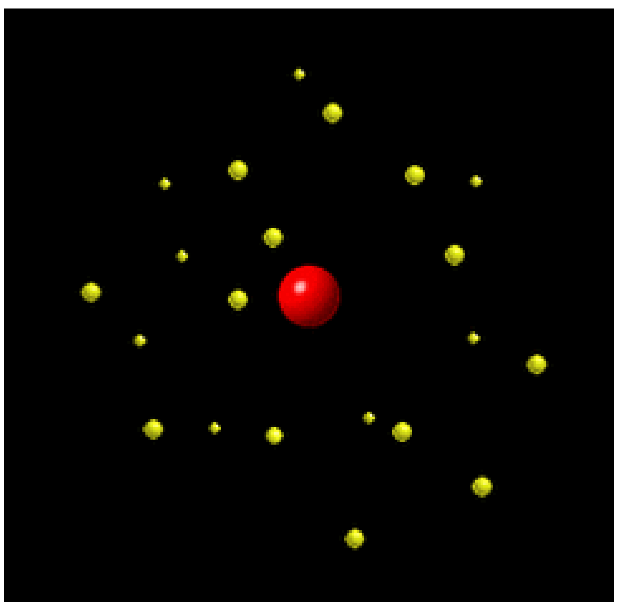
§ 3-0 引言

慢化

快中子 → 热中子

产生

扩散



运动

消亡

吸收

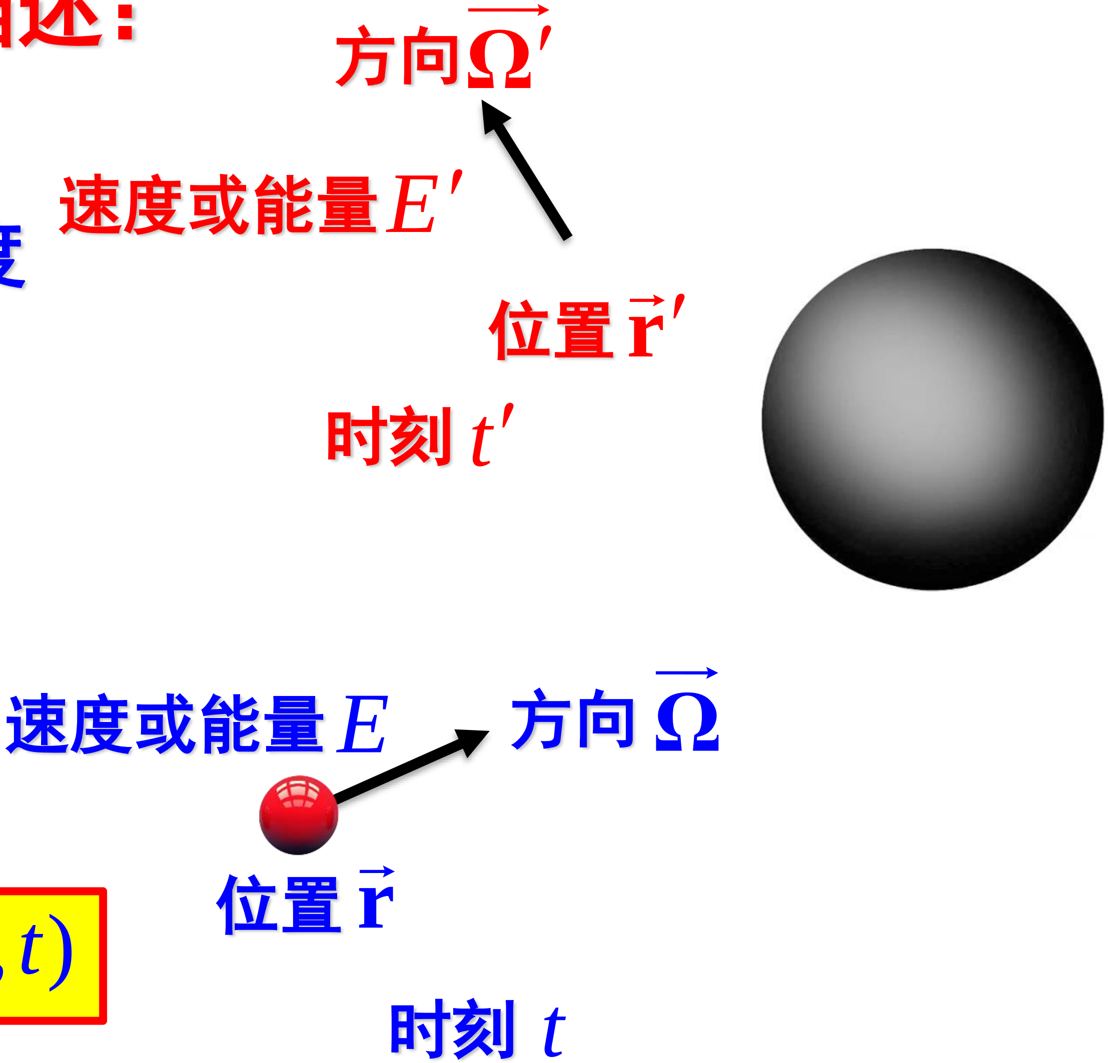
§ 3-0 引言

- 中子状态的描述：

中子角通量密度

$$\boxed{\Phi(\vec{\mathbf{r}},\overrightarrow{\mathbf{\Omega}},E,t)}$$

$$\boxed{\Phi(x,y,z,\theta,\varphi,E,t)}$$



第3章 中子扩散理论

§3-0 引言

§3-1 单能中子扩散方程

§3-2 非增殖介质内中子扩散方程的解

§3-3 扩散长度、慢化长度、徙动长度

§ 3-1 单能中子扩散方程

中子输运方程 → $\Phi(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{\Omega}},E,t)$

↓

不考虑时间： 稳态中子输运方程 → $\Phi(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{\Omega}},E)$

↓

不考虑方向： 稳态中子扩散方程 → $\Phi(\vec{\mathbf{r}},E)$

↓

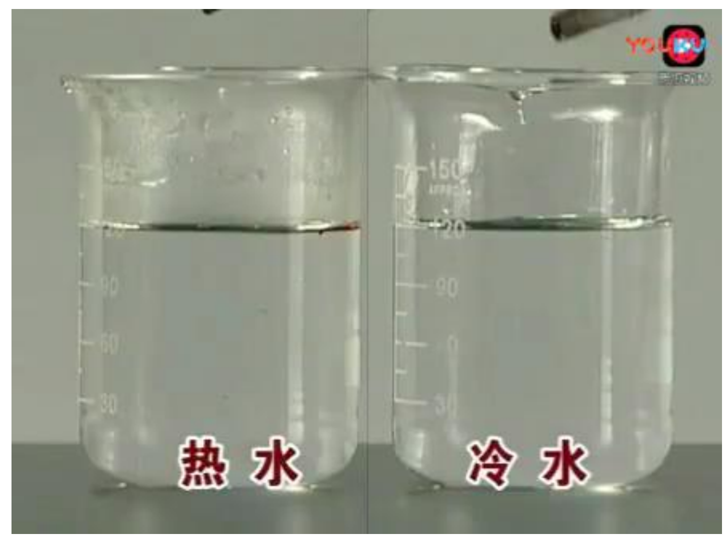
不考虑能量： 稳态单能中子扩散方程 → $\Phi(\vec{\mathbf{r}})$

§ 3-1 单能中子扩散方程

斐克定律(Fick’s Law)

扩散现象：

物质分子从高浓度区域向低浓度区域转移的现象

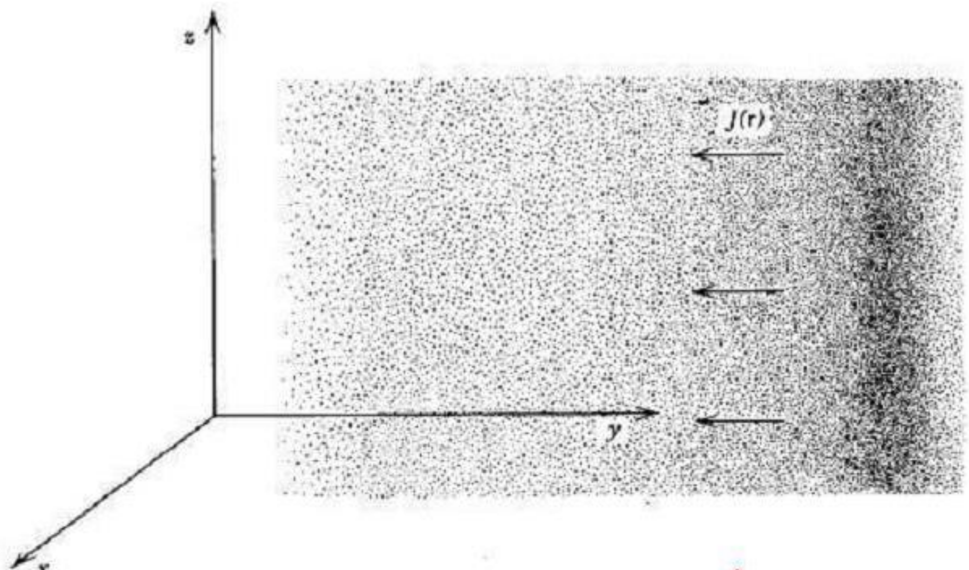


§ 3-1 单能中子扩散方程

扩散规律

- **方向：**

浓度高 ⟶ 浓度低



中子通量的梯度方向

- **速度：**

∝ 浓度的梯度

$$\vec{J} = -D\nabla\Phi$$

§3-1 单能中子扩散方程

斐克定律的推导

场论知识

梯度： $$\mathbf{grad}\ \Phi = \nabla\Phi$$

散度： $$\mathrm{div}\ \vec{\mathbf{J}} = \nabla\cdot\vec{\mathbf{J}}$$

算子： $$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{\mathbf{k}}$$

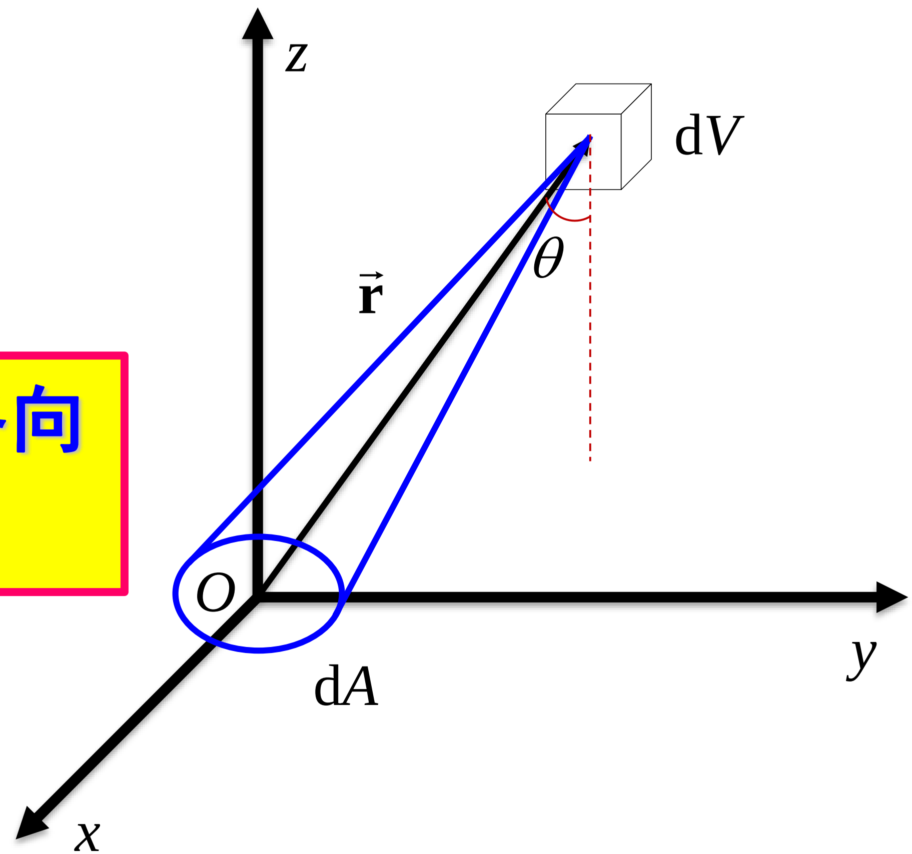
$$\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

§ 3-1 单能中子扩散方程

- **dV内单位时间发生散射的中子数：**

$$\Sigma_s(\vec{\mathbf{r}})\Phi(\vec{\mathbf{r}})\mathrm{d}V$$

假设1：中子的散射是各向同性的



- **向dA对应方向飞行的概率：**

$$\frac{\mathrm{d}A\cos\theta}{4\pi r^2}$$

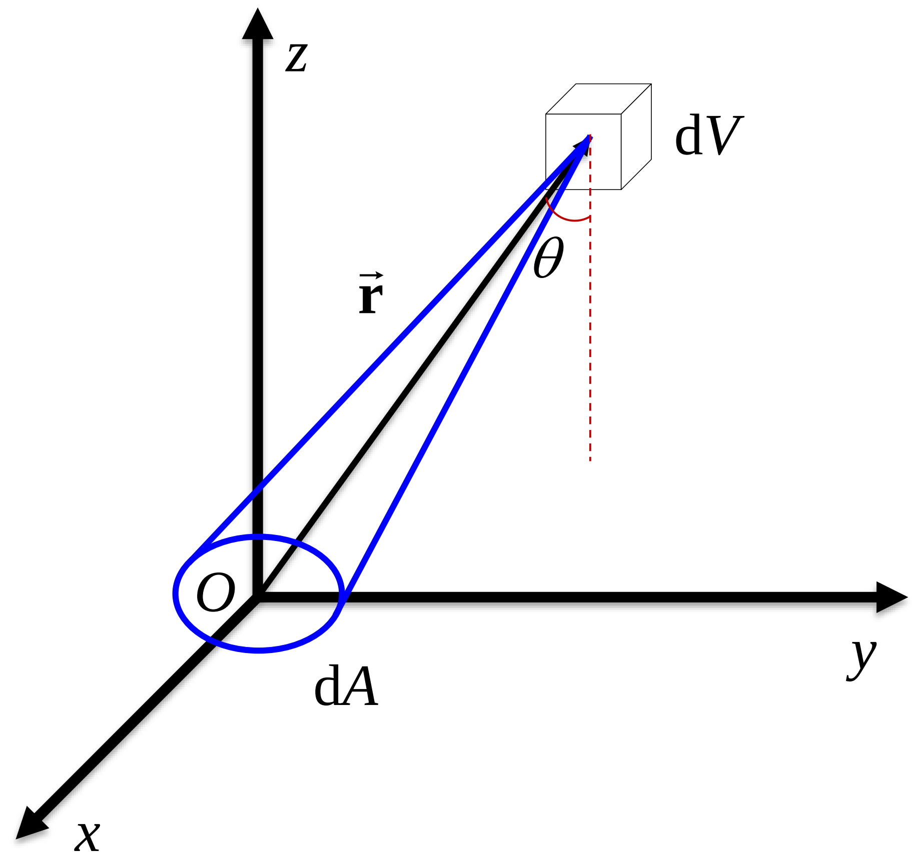
§ 3-1 单能中子扩散方程

- 运动至dA不发生作用的概率：

$$\exp\left[-\int_r \Sigma_t(\vec{\mathbf{r}})\mathrm{d}r\right]$$

- 单位时间内，在 $\vec{\mathbf{r}}$ 处产生最后到达dA的中子数：

$$n(\vec{\mathbf{r}}) = \Sigma_s(\vec{\mathbf{r}})\Phi(\vec{\mathbf{r}})\mathrm{d}V \cdot \frac{\mathrm{d}A\cos\theta}{4\pi r^2} \cdot \exp\left[-\int_r \Sigma_t(\vec{\mathbf{r}})\mathrm{d}r\right]$$

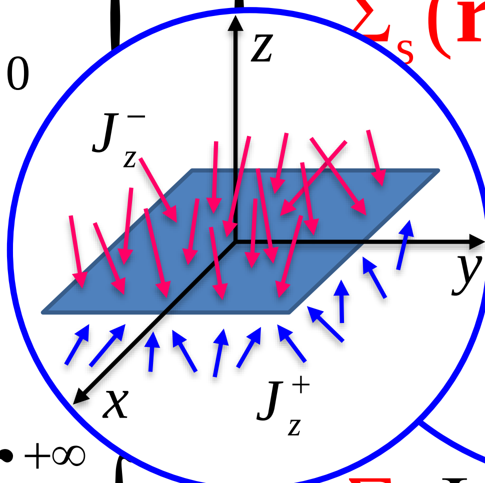


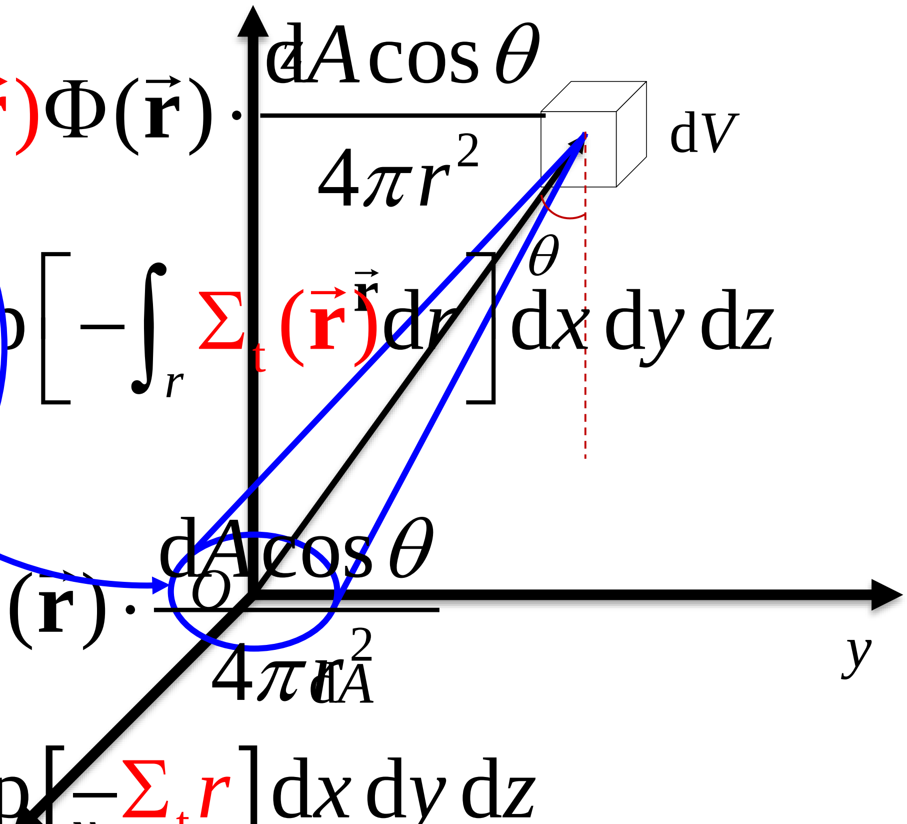
§ 3-1 单能中子扩散方程

假设2：介质为无限均匀介质

- **自上而下穿过d*A*的中子数：**

$$J_z^- \mathrm{d}A = \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Sigma_s(\vec{\mathbf{r}})\Phi(\vec{\mathbf{r}})\cdot\frac{\mathrm{d}A\cos\theta}{4\pi r^2}\exp\left[-\int_r \Sigma_t(\vec{\mathbf{r}})\,\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$





$$= \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Sigma_s\Phi(\vec{\mathbf{r}})\cdot\frac{\mathrm{d}A\cos\theta}{4\pi r^2}\cdot\exp\left[-\Sigma_t r\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

§ 3-1 单能中子扩散方程

$$J_z^- \mathrm{d}A = \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Sigma_s \Phi(\vec{\mathbf{r}}) \cdot \frac{\mathrm{d}A\cos\theta}{4\pi r^2}$$

$$\cdot \exp\left[-\Sigma_t r\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \Sigma_s \Phi(\vec{\mathbf{r}}) \cdot \frac{\mathrm{d}A\cos\theta}{4\pi r^2}$$

$$\cdot \exp\left[-\Sigma_t r\right] r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$$

$$J_z^- = \frac{\Sigma_s}{4\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \Phi(\vec{\mathbf{r}}) \cdot \exp\left(\Sigma_t r\right) \sin\theta \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$$

§ 3-1 单能中子扩散方程

假设3：通量密度随空间位置缓慢变化

- **一阶泰勒展开：**

$$\Phi(\vec{\mathbf{r}}) \approx \Phi_0 + x\left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{x=x_0} + y\left.\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right|_{y=y_0} + z\left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=z_0}$$

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad z = r\cos\theta$$

$$J_z^- = \frac{\Sigma_s}{4\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \Phi(\vec{\mathbf{r}})\cdot\exp\left(\Sigma_t r\right)\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$$

§ 3-1 单能中子扩散方程

$$J_z^- = \frac{\Sigma_s}{2}\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi/2}\left(\Phi_0 + r\cos\theta\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=z_0}\right)\exp(\Sigma_t r)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$$

假设4：介质为弱吸收介质

$$J_z^- = \frac{\Sigma_s}{2}\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi/2}\left(\Phi_0 + r\cos\theta\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=z_0}\right)\exp(\Sigma_s r)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$$

$$J_z^- = \frac{\Phi_0}{4} + \frac{1}{6\Sigma_s}\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=z_0}$$

§ 3-1 单能中子扩散方程

- **同理类推：**

$$J_x^+ = \frac{\Phi_0}{4} - \frac{1}{6\Sigma_s}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\bigg|_{x=x_0} \qquad J_x^- = \frac{\Phi_0}{4} + \frac{1}{6\Sigma_s}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\bigg|_{x=x_0}$$

$$J_y^+ = \frac{\Phi_0}{4} - \frac{1}{6\Sigma_s}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\bigg|_{y=y_0} \qquad J_y^- = \frac{\Phi_0}{4} + \frac{1}{6\Sigma_s}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\bigg|_{y=y_0}$$

$$J_z^+ = \frac{\Phi_0}{4} - \frac{1}{6\Sigma_s}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\bigg|_{z=z_0} \qquad J_z^- = \frac{\Phi_0}{4} + \frac{1}{6\Sigma_s}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\bigg|_{z=z_0}$$

§ 3-1 单能中子扩散方程

$$J_x = J_x^+ - J_x^- = -\frac{\lambda_s}{3}\left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{x=x_0}$$

$$J_y = J_y^+ - J_y^- = -\frac{\lambda_s}{3}\left.\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right|_{y=y_0}$$

$$J_z = J_z^+ - J_z^- = -\frac{\lambda_s}{3}\left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=z_0}$$

$$\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}_0) = -\frac{\lambda_s}{3}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_0}$$

§ 3-1 单能中子扩散方程

$$\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}_0) = -\frac{\lambda_s}{3}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_0}$$

$$\vec{\mathbf{J}} = -\frac{\lambda_s}{3}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = -\frac{\lambda_s}{3}\nabla\Phi$$

扩散系数： $D = \dfrac{\lambda_s}{3}$

$$\vec{\mathbf{J}} = -D\nabla\Phi$$

§ 3-1 单能中子扩散方程

斐克定律的适用范围

假设1：中子的散射是各向同性的

$$D = \frac{\lambda_{\text{tr}}}{3} \qquad \lambda_{\text{tr}} = \frac{\lambda_{\text{s}}}{1 - \overline{\mu_0}} \qquad \overline{\mu_0} = \frac{2}{3A}$$

假设2：介质为无限均匀介质

- 真空边界平均自由程内
- 两种介质的交界面

§ 3-1 单能中子扩散方程

假设3：通量密度随空间位置缓慢变化

- 中子源附近

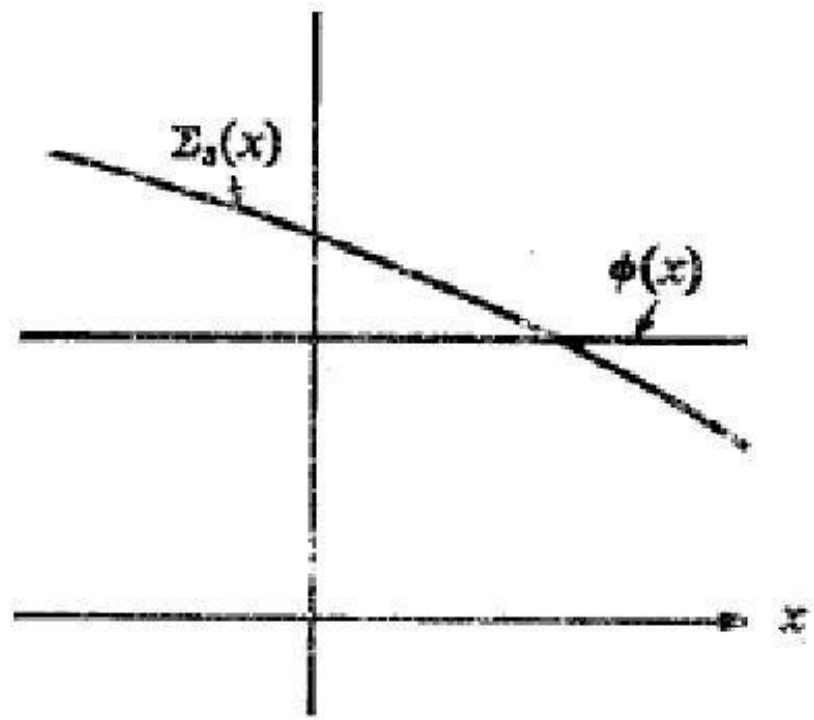
假设4：介质为弱吸收介质

- 强吸收体（控制棒）附近

§ 3-1 单能中子扩散方程

思考：

- 左右两边通量分布相同，材料的散射截面不同，请问交界面上有无从左至右的净中子流？



假想的具有均匀通量分布的非均匀介质